1. **Вероятности для экспериментов с конечным числом исходов**

В современном статистическом понимании, вероятность есть количественная мера возможности наступления события. Понятие вероятности относится к таким явлениям, результаты наблюдений в которых являются непредсказуемыми: событие, которое нас интересует, может наступить, а может и не наступить; измеряемая в эксперименте величина может принять такое, а может - иное значение. В то же время, вряд ли разумную теорию можно построить для явлений, вообще не предсказуемых.

Теория вероятностей имеет дело с такими процессами, в которых наблюдается статистическая устойчивость: конкретный результат эксперимента однозначно предсказать невозможно, но при многократном его повторении обнаруживается устойчивая закономерность. Например, невозможно предсказать, какой стороной упадет монета, но если подбрасывать ее много раз, то окажется, что каждая сторона выпадает в среднем в половине случаев. Если *n* раз подбросить монету и она раз упадет орлом, то отношение будет близко к 0,5. При подбрасывании правильной игральной кости каждая из ее граней (грани отмечены числами от 1 до 6) выпадет в среднем в 1 случаев.

В таких явлениях устойчивую частоту события принимают за оценку его вероятности и тут сразу возникает множество проблем, связанных определением вероятностей одних событий на основе известных вероятностей некоторых других событий, с вычислениями количественных характеристик наблюдаемых случайных величин, с проверкой гипотез о природе вероятностных наблюдений.

Первая появившаяся модель вычисления вероятностей, называемая теперь ”***классическая вероятность***”, связана с такими статистическими экспериментами, в которых возможно лишь конечное число исходов. Первоначальный интерес здесь был связан с азартными играми, где явно господствует случайность.

Пусть - конечное множество, состоящее из элементов , которые и будем называть элементарными исходами. Число элементов в конечном множестве будем обозначать , так что для множества = имеем = *N*.

Подмножества множества будем обозначать большими латинскими буквами соответственно, если подмножество состоит из элементарных исходов, то пишем = .

**Определение**. Множество назовем множеством элементарных исходов, подмножества являются случайными событиями. Вероятность случайного события равна

= . (1.1)

Считаем, что подмножество, не содержащее ни одного исхода (пустое множество Ø) также является событием – невозможным событием, вероятность его равна нулю.

Интерпретация такого определения вероятности состоит в следующем: элементарные исходы , входящие в подмножество , называются исходами, благоприятствующими событию (событие наступает, если в результате проведения эксперимента наблюдается один из исходов ), и вероятностью события называется отношение числа исходов, благоприятствующими событию , к общему числу возможных элементарных исходов. Естественно, мы ожидаем, что событие, состоящее из большого числа благоприятствующих исходов, будет наблюдаться в эксперименте чаще, чем событие, состоящее из малого числа таких исходов. Поэтому первому событию мы приписываем более высокое значение вероятности, рассчитывая, что эта вероятность сможет служить мерой возможности наступления события в результате наблюдения. При этом очень важно, с точки зрения правильного понимания вероятности, чтобы все элементарные исходы были равновозможными, и именно - ***элементарными***, то есть в рамках рассматриваемой модели статистического эксперимента любой элементарный исход нельзя представить как состоящий из некоторых более простых, элементарных исходов.

Рассмотрим несколько примеров, поясняющих смысл классического определения вероятности.

**Пример 1.1.** Правильная монета подбрасывается два раза. Обозначая орел как 1, а решку как 0, получаем множество всех возможных элементарных исходов, состоящее из четырех пар чисел: , ; пара (0,1) означает, что при первом подбрасывании выпала решка, а при втором – орел. Случайными событиями здесь являются, например, – ровно один раз выпал орел; B – выпало не меньше одного орла. Вероятности этих событий , .

**Пример 1.2**. Подбрасываются случайным образом две правильные игральные кости. Обозначая результат одного эксперимента, если на первой кости выпало число *i* , а на второй выпало *k* , записываем множество всех возможных исходов

, очевидно, .

Любое высказывание относительно исхода эксперимента определяет случайное событие. Например, “*сумма выпавших очков не меньше 10*” представляет случайное событие . В результате проведения одного эксперимента (подбрасывания двух игральных костей) это событие может наступить (если выпадет один из перечисленных в фигурных скобках исходов), либо не наступить, и вероятность 1/6 представляет меру ожидаемой частости наступления события в большой серии таких экспериментов.

**Упражнение 1**. Найти в этой схеме вероятности событий:

,

,

,

.

**Пример 1.3**. Имеется логическая схема, состоящая из четырех элементов (рис. 1.1.). Каждый элемент может находиться с равной возможностью случайно в одном из состояний: в состоянии, обозначаемом 1, он замкнут, то есть передает сигнал, а в состоянии 0 он разомкнут и сигнала не передает.

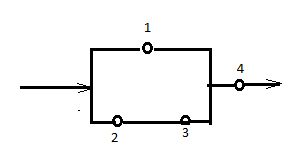


Рис. 1.1. Переключательная схема

С какой вероятностью эта схема будет замкнута?

Состояние сети можно задать с помощью набора , где = 1, если *i* - й элемент замкнут и = 0, если он разомкнут (*i =* 1,2,3,4). Такие наборы нулей и единиц представляют собой элементарные исходы ; всего этих исходов имеется 16 – количество двоичных четырехразрядных чисел, так что . Обозначим событие, заключающееся в том, что эта схема замкнута. Событие , как легко проверить, включает следующие состояния: (1,1,1,1), (1,1,0,1), (1,0,1,1), (1,0,0,1), (0,1,1,1), то есть, и .

При вычислении вероятностей для событий, связанных с конечными множествами элементарных исходов бывают необходимы **комбинаторные формулы**, наиболее часто

используемые формулы приведем здесь. Множество других формул, полезных для решения задач, можно найти в учебниках по теории вероятностей и дискретной математике.

**Число перестановок**: если имеется *n* различных объектов, то их можно переставить в различном порядке числом способов, равным *n*-факториал:

*.*

**Число сочетаний**: если из *n* предметов извлекать случайным образом группы по k предметов (не возвращая извлеченные), то число таких групп равно

.

называется биномиальным коэффициентом; бином Ньютона показывает роль этих коэффициентов:

. (1.2)

С комбинаторной точки зрения, есть число *k* – элементных подмножеств у множества, состоящего из *n* элементов. На языке теории вероятностей это означает, что в множестве элементарных исходов (таком что ), существует различных случайных событий таких, что . Общее число случайных событий получается суммированием по всем *k* от 0 до *n* , и согласно формуле (1.2),

;

пустое множество Ø , соответствующее *k* = 0, также считаем событием (невозможным) . Отметиv еще, что иногда при больших значениях *n* может быть полезной асимптотическая формула Стирлинга для факториала:

знак обозначает, что отношение величин, стоящих слева и справа от него, стремится к 1.

Рассмотрим несколько примеров решения задач с применением комбинаторных формул.

**Пример 1.4.** На полке случайным образом расставлено 10 книг, среди них – трехтомник Пушкина. Какова вероятность того, что эти три тома оказались рядом?

Множество состоит из всех перестановок десяти книг, так что . Три тома могут быть расположены рядом в 8 положениях (на левом краю полки, на правом и на всех промежуточных). Кроме того, эти три тома могут быть расставлены в случайном порядке 3! способами; следовательно, искомая вероятность равна

= = .

**Пример 1.5.** Из колоды в 52 карты наугад вынимается *n* карт ( ) . С какой вероятностью среди них будет хотя две одинаковых ((одинаковых по старшинству, например, два короля, или две десятки). При каком *n* эта вероятность будет не менее ?

В этом примере множество элементарных исходов Ω состоит из всех возможных наборов по *n* карт, число таких возможных элементарных исходов . В данном случае проще подсчитать число наборов из *n* карт, в которых нет одинаковых по достоинству: поскольку каждая карта в колоде представлена четырьмя цветами, то таких наборов можно составить . Обозначая искомую вероятность *p(n)* , имеем,

Непосредственные вычисления дают *p(5)* = 0,4929 и *p(6)* = 0,6548; поскольку *p(n)* растет с увеличением *n* , то это и есть ответ.

**Пример 1.6.** Следующий пример, основанный на ошибочных рассуждениях (впрочем, достаточно типичных), может служить некоторым предостережением.

Некто утверждает, что согласно его наблюдениям, при подбрасывании трех игральных костей сумма 11 выпадает чаще, чем сумма 12. В то же время ему известно определение вероятности, согласно которому эти события должны быть равновероятными. В подтверждение он приводит следующие рассуждения: из трех чисел (от 1 до 6) сумму 11 можно составить 6 способами,

,

аналогично, сумму 12,

,

так что .

В действительности перечисленные исходы не являются элементарными, как того требует классическое определение вероятности; в самом деле, например, является составным событием,

,

в то время как

4+4+4 = (4,4,4).

В литературе имеется упоминание о том, что с предложением растолковать такое противоречие действительно некто обратился в свое время к французскому естествоиспытателю Блезу Паскалю. Правильный подсчет элементарных исходов дает здесь . Пример этот поучителен еще в одном отношении: поскольку в рассматриваемом статистическом эксперименте , то отличие вероятностей составляет весьма небольшую величину

.

Спрашивается: сколько времени надо посвятить данному увлекательному занятию, чтобы на основе жизненного опыта с достаточной уверенностью утверждать, что два события имеет значимо различающиеся вероятности?

Отметим основные свойства вероятности, следующие из классического определения:

1. если события и не имеют общих элементарных исходов (то есть, множества и не пересекаются, и ), то вероятность того, что произойдет хотя бы одно из событий, или , равна

.

**Пример 1.7**. В ящике находятся 8 белых и 4 черных шара. Из ящика случайным образом извлекаем два шара. Найти вероятности того, что оба шара белые (событие *A*), что оба шара черные (событие *B*) и вероятность того, шары разного цвета (событие *С*).

Множество всех возможных исходов данного эксперимента состоит из множества всех пар, которые можно составить из двенадцати шаров, следовательно

.

Событие состоит из пар белых шаров, количество которых равно ,

следовательно,

Аналогичным образом получаем

Число пар разноцветных шаров равно , и .

**Пример 1.8**. **Гипергеометрическое распределение**. Предположим, имеется множество из *N* объектов, среди которых *K* объектов (*K* < *N*) как-то выделены. Например, назовем выделенные объекты красными (их *K* штук), а прочие (*N* – *K*) – синими. Случайным образом выбираются *n* объектов (контрольная выборка). С какой вероятностью среди них окажется *k* красных?

Пусть *k* - некоторое число, Всего может быть вариантов выбрать *n* предметов из *N*. Из *K* красных объектов можно способами выбрать какие-то *k* штук. Аналогично число вариантов выбрать оставшиеся (*n*-*k*) синих объектов контрольной выборки из общего числа (*N* – *K*) синих равно . Таким образом, вероятность получить *k* красных объектов в контрольной выборке длины *n* равна